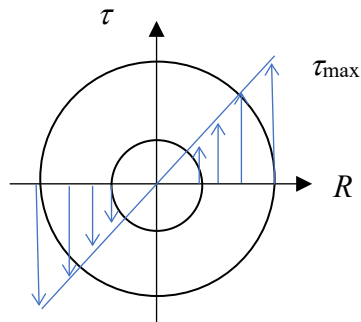


**Problème1**

1. Schéma



2. Moment d'inertie et moment de résistance polaires de la section

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D_e^4 - D_i^4) = \frac{\pi D_e^4}{32} (1 - \lambda^4)$$

$$W_p = \frac{2I_p}{D_e} = \frac{\pi D_e^3}{16} (1 - \lambda^4)$$

3. Contrainte de cisaillement maximum et angle de torsion :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16M_t}{\pi(1 - \lambda^4)D_e^3}$$

$$\varphi = \frac{M_t \ell}{GI_p} = \frac{32M_t \ell}{\pi G(1 - \lambda^4)D_e^4}$$

4. En divisant la première équation par la seconde on peut écrire

$$\frac{\tau_{max}}{\varphi} = \frac{16M_t}{\pi(1 - \lambda^4)D_e^3} \frac{\pi G(1 - \lambda^4)D_e^4}{32M_t \ell} = \frac{GD_e}{2\ell}$$

D'où l'on tire

$$D_e = \frac{2\ell \tau_{max}}{G\varphi},$$

Et en insérant l'expression du diamètre dans l'équation de la contrainte de cisaillement max, on peut alors exprimer

$$\lambda = \left( 1 - \frac{2G^3 \varphi^3 M_t}{\pi \tau_{max}^4 \ell^3} \right)^{\frac{1}{4}}$$

5. Application numérique :

$$G = 82 \text{ GPa}$$

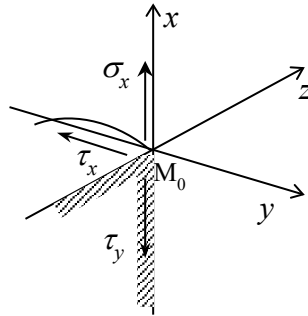
$$D_e = 0,09 \text{ m}$$

$$D_i = 0,074 \text{ m}$$

$$\lambda = 0,82$$

**Problème 2**

1. Schéma de l'état de contrainte au point  $M_0$  : L'état de contrainte est bidimensionnel. La figure ci-contre indique le choix des axes de référence en ce point.

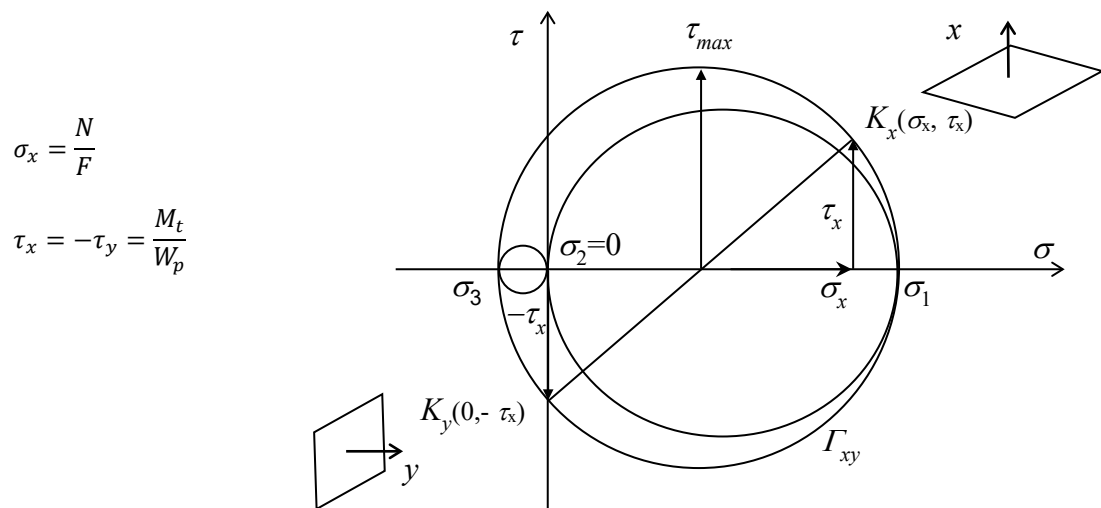


2. Caractéristiques géométriques de la section

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

$$F = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2)$$

3. Expression des contraintes non nulles et cercle de Mohr : les contraintes  $\sigma_x$  et  $\tau_x$  permettent de dessiner les points  $K_x$  et  $K_y$  et ainsi de définir le centre du cercle  $\Gamma_{xy}$  et d'exprimer que le rayon du cercle est égal à la contrainte de cisaillement maximum.



$$\sigma_x = \frac{N}{F}$$

$$\tau_x = -\tau_y = \frac{M_t}{W_p}$$

La représentation du cercle de Mohr permet aisément de se convaincre que la contrainte de cisaillement maximale est donnée par

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \frac{1}{2} \sigma_e$$

D'où l'on peut exprimer l'effort normale

$$N = F \sqrt{\sigma_e^2 - 4 \left(\frac{M_t}{W_p}\right)^2}$$

- (3.) Approche alternative : on peut simplement reprendre l'expression de la contrainte de cisaillement pour un état de contrainte bidimensionnel.

$$\tau_{\varphi}^{\square} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \sin(2\varphi - 2\varphi_0) = -R \sin(2\varphi - 2\varphi_0)$$

Et en déduire la contrainte de cisaillement maximale ( $\tau_{\varphi}^{\square} = R$ ) dans le cas particulier où  $\sigma_y = 0$

$$\tau_{max}^{\square} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \frac{1}{2}\sigma_e$$

4. Les contraintes principales sont données par

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = 336 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = -24 \text{ MPa}\end{aligned}$$

5. Application numérique

$$F = 4,07 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\tau = 89,9 \text{ MPa}$$

$$N = 1,27 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$\sigma_1 = 336 \text{ MPa}$$

$$W_p = 200 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma = 312 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = 180 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -24,0 \text{ MPa}$$

**Problème 3**

1. Moments d'inertie et de résistance polaires

$$I_{p1} = \frac{\pi D_1^4}{32} \qquad I_{p2} = \frac{\pi}{32} (D_2^4 - d_2^4) = \frac{\pi D_2^4}{32} (1 - \alpha^4) \quad , \quad \alpha = \frac{d_2}{D_2}$$

$$W_{p1} = \frac{I_{p1}}{D_1/2} = \frac{\pi D_1^3}{16} \qquad W_{p2} = \frac{I_{p2}}{D_2/2} = \frac{\pi D_2^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

2. Contrainte de cisaillement maximum

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p}$$

3. Condition de similitude des arbre : Comme  $\tau_{max}$  et  $M_t$  sont respectivement égaux dans les deux cas, il en résulte que  $W_{p1} = W_{p2}$

$$\frac{\pi}{16} D_1^3 = \frac{\pi}{16} D_2^3 (1 - \alpha^4) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3}$$

4. Le rapport des angles de torsion est :

$$\varphi_1 = \frac{M_t \ell}{GI_{p1}} \quad \varphi_2 = \frac{M_t \ell}{GI_{p2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{I_{p1}}{I_{p2}} = \frac{D_1^4}{(1 - \alpha^4) D_2^4}$$

5. Le rapport des masses vaut quant à lui :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho \ell \frac{\pi}{4} D_2^2 (1 - \alpha^2)}{\rho \ell \frac{\pi}{4} D_1^2} = \frac{D_2^2}{D_1^2} (1 - \alpha^2)$$

6. Application numérique :

$$\alpha = 0,8057 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 14,50 \text{ cm}$$

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 0,833$$

$$\frac{m_2}{m_1} = 0,505$$

Ainsi, à contrainte égale, le cylindre creux est davantage rigide ( $\varphi_2 < \varphi_1$ ) bien que sa masse ne soit que la moitié de celle du cylindre plein.